Fiche méthode

Projection de vecteurs sur un système d'axes

1 Choisir les axes

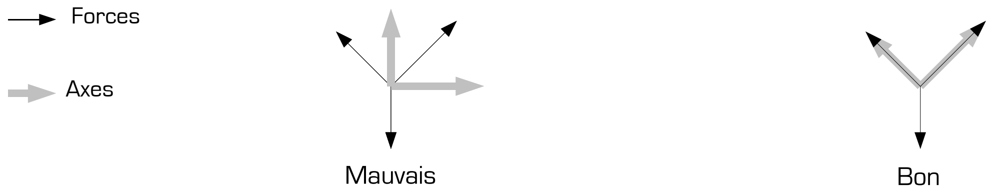
1.1 Les axes sont déjà définis

Dans le cas, vous n'avez rien à faire… Il est temps de projeter les vecteurs (voir partie 2).

.

1.2 Vous devez définir les axes

Choisir les axes est un moment délicat car un mauvais choix complique inutilement (et dangereusement) les calculs. Si vous avez deux forces dont les directions sont perpendiculaires, le mieux est de choisir les axes suivants ces directions.

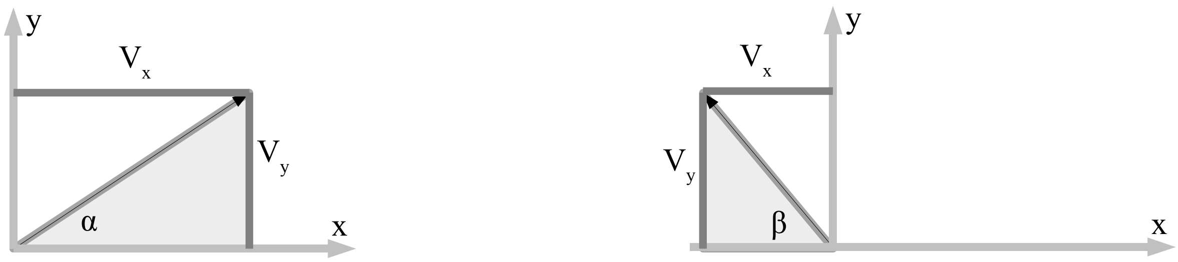


2 Projection des vecteurs

2.1 Un peu de mathématiques (Rappels)

Projeter les vecteurs sur les axes revient à trouver les coordonnées des vecteurs. Vous savez (normalement) déjà le faire.

2.2 Exemple



On voit en évidence deux triangles rectangles dont les trois cotés sont Vx, Vy et la norme du vecteur. On peut donc appliquer les relations de trigonométrie : sin , cos et tan.

Pour l'exemple de gauche :

$$\cos(\alpha)=\frac{Vx}{V}\Rightarrow Vx=V\cos(\alpha)\ ;\ \sin(\alpha)=\frac{Vy}{V}\Rightarrow Vy=V\sin(\alpha)$$

Pour l'exemple de droite :

$$\cos(\beta)=\frac{-Vx}{V}\Rightarrow Vx=-V\cos(\beta)\ ;\ \sin(\beta)=\frac{Vy}{V}\Rightarrow Vy=V\sin(\beta)\ .$$

le signe négatif dans l'expression de Vx est là pour indiquer le sens de la projection (+ → dans le sens de l'axe, - → dans le sens contraire de l'axe).

3 Utilisation

On traduit ensuite la loi vectorielle par son équivalent en coordonnées.

✔ Exemple sur le principe d'inertie : Si les forces se compensent, alors $\Sigma\vec{F}_{ext}=\vec{0}$. Pour trois forces nommées $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ que l'on projette sur deux axes x et y : $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}=\begin{pmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{3x}\\F_{3y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Donc sur x : $F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=0$ et sur y : $F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0$

✔ Exemple sur la somme des forces : par définition $\vec{f}=\Sigma\vec{F}_{ext}$. Pour trois forces nommées $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ que l'on projette sur deux axes x et y : $\vec{f}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}=\begin{pmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{3x}\\F_{3y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix}$

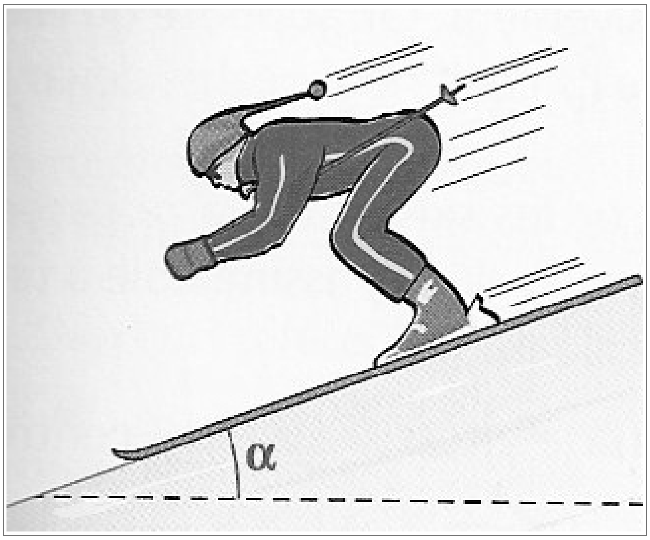
Donc sur x : $f_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}$ et sur y : $f_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}$

4 Exercice résolu : Schuss !

4.1 Énoncé

Un skieur, dont la valeur du poids est $P=600\,\mathrm{N}$, descend une piste enneigée rectiligne faisant un angle $\alpha=20{,}0°$ avec l'horizontale. Le skieur, assimilable à un solide, descend la piste à vitesse constante. On néglige les frottements de la neige sur les skis et la poussée d'Archimède exercée par l'air devant les autres forces. Les frottements de l'air peuvent être modélisés par une force parallèle à la pente, opposée au mouvement et dont la valeur augmente avec la vitesse.

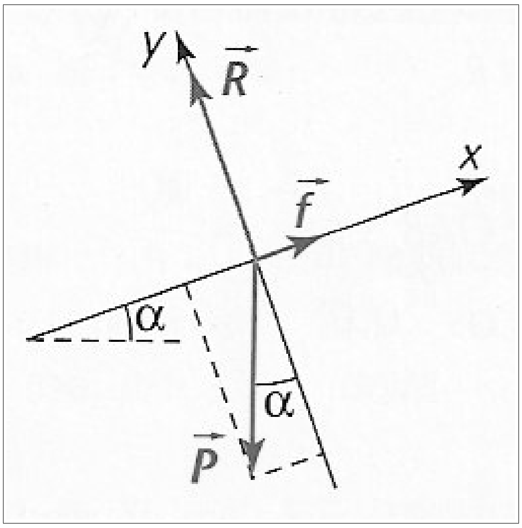
1. Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur le skieur.
2. En appliquant le principe d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer les valeurs de toutes les forces qui s'exercent sur le skieur.



4.2 Corrigé

1. Le skieur est soumis à trois forces:
   - ✔ son poids $\vec{P}$, vertical dirigé vers le bas et de valeur $P=600\,\mathrm{N}$;
   - ✔ la réaction $\vec{R}$ de la piste : les frottements sur la neige étant négligeables devant les autres forces, $\vec{R_T}=\vec{0}$ et $\vec{R}$ est perpendiculaire à la piste dirigée vers le haut ($\vec{R}=\vec{R_N}$);
   - ✔ la force de frottements de l'air $\vec{f}$, parallèle à la piste et opposée au mouvement.

2. Le centre d'inertie du skieur décrit un mouvement rectiligne uniforme. D'après le principe d'inertie, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées est nulle : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}=\vec{0}$.



Projection des forces :

$$\vec{P}: \begin{array}{l} P_X=-P\sin(\alpha) \\ P_Y=-P\cos(\alpha) \end{array}$$

$$\vec{f}: \begin{array}{l} f_X=f \\ f_Y=0 \end{array}$$

$$\vec{R}: \begin{array}{l} R_X=0 \\ R_Y=R \end{array}$$

Le principe d'inertie $\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}=\vec{0}$ se traduit par :

$$\begin{array}{l} P_X+R_X+f_X=-P\sin(\alpha)+0+f=0[1] \\ P_Y+R_Y+f_Y=-P\cos(\alpha)+R+0=0[2] \end{array}$$

avec $[1]$, on obtient $f=P\sin(\alpha)=600\times\sin(20°)=205\,\mathrm{N}$ et avec $[2]$, on obtient $R=P\cos(\alpha)=600\times\cos(20°)=564\,\mathrm{N}$